|  |  |
| --- | --- |
|  | D:\Dokumen Mocher\desktop\logo UMB.jpg |
|  | **MODUL PERKULIAHAN** |
|  |  |
|  | **HUKUM DAN PEMBUKTIAN HIMPUNAN**   * Hukum pada himpunan * Prinsip dualitas. * Pembuktian pernyataan himpunan |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  |  |  | |  | |  |
|  | **Fakultas** | | **Program Studi** | **Tatap Muka** | **Kode MK** | | **Disusun Oleh** | |  |
|  | Ilmu Komputer | | Sistem Informasi | **03** | **87004** | | Drs. Sapto Prayogo. M.Kom | |  |
| **Abstract** | | | | **Kompetensi** | |
|  | | | |  | |
| Dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar. merupakan prinsip dualitas  . | | | | Mahasiswa mampu memahami dan dapat membuktikan pernyataan himpunan | |

**Hukum pada himpunan**

1. Hukum pada himpunan.

Hukum pada himpunan adalah sifat-sifat (*properties*) himpunan. Hukum himpunan sering disebut sebagai hukum aljabarhimpunan. Berikut adalah hukum aljabar pada himpunan.

|  |  |
| --- | --- |
| Hukum identitas:  *A* = *A*  *A*U = *A* | Hukum *null*/dominasi:  *A* =  *A*U = U |
| Hukum komplemen:  *A* = U  *A* = | Hukum idempoten:  *AA* = *A*  *AA* = *A* |
| Hukum involusi:  = A | Hukum penyerapan (absorpsi):  A (A B) = A  A (A B) = A |
| Hukum komutatif:  A B = B A  A B = B A | Hukum asosiatif:  A (B C) = (A B) C  A (B C) = (A B) C |
| Hukum distributif:  A (B C) = (A B) (A C)  A (B C) = (A B) (A C) | Hukum De Morgan:  =  = |
| Hukum 0/1  = U  = ∅ |  |

1. Prinsip dualitas.

**Prinsip Dualitas** dikatakan berlaku pada saat dua konsep yang berbeda dapat saling dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: Di Amerika kemudi mobil di kiri depan, Inggris (juga Indonesia) kemudi mobil di kanan depan.

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

* mobil harus berjalan di bagian kanan jalan,
* pada jalan yang berlajur banyak, lajur kiri untuk mendahului,
* bila lampu merah menyala, mobil belok kanan boleh langsung

(b) di Inggris,

* mobil harus berjalan di bagian kiri jalan,
* pada jalur yang berlajur banyak, lajur kanan untuk mendahului,
* bila lampu merah menyala, mobil belok kiri boleh langsung

Prinsip dualitas:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris

(Prinsip Dualitas pada Himpunan). Misalkan S adalah suatu kesamaan (identity) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti , dan komplemen. Jika S\* diperoleh dari S dengan mengganti .

* →,
* →,
* → U,
* U →,

sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S\* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

|  |  |
| --- | --- |
| Hukum identitas:  *A* = *A* | Dualnya:  *A*U = *A* |
| Hukum*null*/dominasi:  *A* = | Dualnya:  *A*U = U |
| Hukum komplemen:  *A* = U | Dualnya:  *A*= |
| Hukum idempoten:  *AA* = *A* | Dualnya:  *AA* = *A* |
| Hukum penyerapan:  A (A B) = A | Dualnya:  A (A B) = A |
| Hukum komutatif:  A B = B A | Dualnya:  A B = B A |
| Hukum asosiatif:  A (B C) = (A B) C | Dualnya:  A (B C) = (A B) C |
| Hukum distributif:  A (B C)=(A B) (A C) | Dualnya:  A (B C) = (A B) (A C) |
| Hukum De Morgan:  = | Dualnya:  = |
| Hukum 0/1  = U | Dualnya:  = ∅ |

1. Pembuktian Pernyataan Himpunan.Soal

* Pernyataan himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
* Pernyataan dapat berupa:

1. Kesamaan (*identity*)

Contoh: Buktikan “*A*∩ (*B*∪*C*) = (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*)”

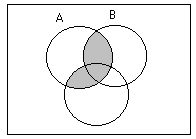
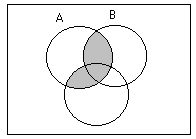
1. Implikasi

Contoh: Buktikan bahwa “Jika A ∩ B = ∅ dan A ⊆ (B ∪ C) maka selalu berlaku bahwa A ⊆ C”.

**1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn**

**Contoh** Misalkan *A*, *B*, dan*C* adalah himpunan. Buktikan *A*∩ (*B*∪*C*) = (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*) dengan diagram Venn.

*Bukti:*



*A*∩ (*B*∪*C*) (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*)

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.

Terbukti bahwa*A*∩ (*B*∪*C*) = (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*).

* Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.
* Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

**2. Pembuktian dengan menggunakan table keanggotaan**

**Contoh.** Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Buktikan bahwa *A*∩ (*B*∪*C*) = (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*).

*Bukti*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | *B* | *C* | *B*∪*C* | *A*∩ (*B*∪*C*) | *A*∩*B* | *A*∩*C* | (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Karena kolom *A*∩ (*B*∪*C*) dan kolom (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*) sama, maka *A*∩ (*B*∪*C*) = (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩*C*).

**3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.**

**Contoh.**

Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa (*A*∩*B*) ∪ (*A*∩) = *A*

*Bukti*:

(*A*∩*B*) ∪ (*A*∩) = *A*∩ (*B*∪) (Hukum distributif)

= *A*∩U (Hukum komplemen)

= *A* (Hukum identitas)

**Contoh.** Misalkan *A* dan *B* himpunan. Buktikan bahwa *A*∪ (*B* – *A*) = *A*∪*B*

*Bukti*:

*A*∪ (*B* – *A*) =*A*∪ (*B*∩) (Definisi operasi selisih)

= (*A*∪*B*) ∩ (*A*∪) (Hukum distributif)

= (*A*∪*B*) ∩U (Hukum komplemen)

= *A*∪*B* (Hukum identitas)

**Contoh** Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan *A* dan *B*, bahwa

(i) *A*∪ (∩*B*) = *A*∪*B* dan

(ii) *A*∩ (∪*B*) = *A*∩*B*

*Bukti*:

(i) *A*∪ (∩*B*) = ( *A*∪) ∩ (*A*∩*B*) (H. distributif)

= U∩ (*A*∩*B*) (H. komplemen)

= *A*∪*B* (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

*A*∩ (∪*B*) = (*A*∩) ∪ (*A*∩*B*) (H. distributif)

= ∅∪ (*A*∩*B*) (H. komplemen)

= *A*∩*B* (H. identitas)

**4. Pembuktian dengan menggunakan definisi**

* Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian (⊆ atau ⊂).

**Contoh.** Misalkan *A* dan *B* himpunan. Jika *A*∩*B* = ∅ dan *A*⊆ (*B*∪*C*) maka *A*⊆*C.* Buktikan!

*Bukti*:

1. Dari definisi himpunan bagian, *P*⊆ *Q* jika dan hanya jika setiap *x*∈*P* juga∈*Q*. Misalkan *x*∈*A*. Karena *A*⊆ (*B*∪*C*), maka dari definisi himpunan bagian, *x* juga ∈ (*B*∪ C).

Dari definisi operasi gabungan (∪), *x*∈ (*B*∪*C*) berarti *x*∈*B* atau *x*∈*C.*

1. Karena *x*∈*A* dan *A*∩*B* = ∅, maka *x*∉*B*

Dari (i) dan (ii), *x*∈*C* harus benar. Karena ∀x ∈*A* juga berlaku *x*∈ C, maka dapat disimpulkan *A*⊆*C* .

# Daftar Pustaka

1. Firrar Utdirartatmo, Teori Bahasa dan Otomata, Graha Ilmu, Yogyakarta, Edisi 2, 2005.
2. Jonhson, Ricard, *Discrete Mathematics*. Prentice Hall Int, New Jersey, 2001
3. Sri Kusumadewi, Hari Purnomo, Aplikasi Logika Fuzzy, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2004.
4. Klin, George J dan Tina A. Folger, Fuzzy Sets, *Uncertainty and Information*, Prentice Hall Int, New Jersey, 1998.
5. Sumarna, Elektronika Digital, Graha Ilmu, Yogyakarta, 2006.